EX 28 :

1. On a $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$ Donc $(a^2-b^2\ ;2ab\ ;a^2+b^2) \in E$.

2. a/ (x,y,z) élément de E donc $x^2+y^2=z^2$

$$x\wedge y=1 \Leftrightarrow x^2\wedge y^2=1 \Rightarrow x^2\wedge(x^2+y^2)=1\Rightarrow x^2\wedge z^2=1\Rightarrow x\wedge z=1$$

$$\Downarrow$$

$$(x^2+y^2)\wedge y^2=1\Rightarrow z^2\wedge y^2=1\Rightarrow z\wedge y=1$$

b/ Si x et y sont tout les deus paires alors 2 est un diviseur commun de x et y ce qui est absurde car pgcd(x,y)=1

c/ Les restes possibles d'un entier a modulo 4 sont :0 ;1 ;2 ;3.

Alors le tableau de congruence suivant

Reste modulo 4 de a	0	1	2	3
Reste modulo 4 de a^2	0	1	0	1

prouve que. l'équation :$a^2\equiv 2\ (4)$ ne Possède pas de solution entière

d/ Si x et y sont impairs$\Rightarrow x=2k+1$ et $y=2k'+1$

Donc $z^2=x^2+y^2=(2k+1)^2+(2k'+1)^2=4.(k^2+k'^2+k+k')+2\equiv 2(4)$ absurde

Car l'équation :$a^2\equiv 2\ (4)$ ne Possède pas de solution entière

Donc x et y ne sont pas tout les deux impairs .

d/ (x impair et y pair)$\Rightarrow$(x^2 impair et y^2 pair)$\Rightarrow x^2+y^2$ impair$\Rightarrow z^2$ impair$\Rightarrow$ zimpair

(x impair et z impair)$\Rightarrow$ z+x et z-x sont pairs.$\Rightarrow$ il existe deux entiers Strictement positifs p et q / $z+x=2p$ et $z-x=2q$ (car x,yet $z\in IN^*$

Et $x^2+y^2=z^2\Rightarrow z>x$)

(z+x=2p et z-x=2q)$\Rightarrow$ x=p-q et z=p+q et $y^2=z^2-x^2=(p+q)^2-(p-q)^2=4pq$

Soit $d=p\wedge q\Rightarrow$d divise p etq$\Rightarrow$d divise p+q etp-q$\Rightarrow$d divse z et x$\Rightarrow$d=1 car $x\wedge y=1$

Donc p et q sont premiers entre eux.

On a y pair $\Rightarrow y=2k\Rightarrow y^2=4k^2=4pq\Rightarrow k^2=pq$ et comme $p\wedge q=1$ Alors p et q sont Des carrées parfaits.

3. Remarquons d'abord que si $(x,y,z)\in E$ alors $(y,x,z)\in E$ et $(kx,ky,kz)\in E$

Tenant compte de cette remarque et des questions 1. et 2. on peut conclure que

$E=\{(k(a^2-b^2),k(2ab),k(a^2+b^2))\ ;(k(2ab),k(a^2-b^2),k(a^2+b^2));\ k\in IN^*$ et $a>b>0\}$

4.

b=1 et a=2 ⟹ (3,4,5) ;(6,8,10) ; (9,12,15) ;(4,3,5); (8,6,10);(12,9,15)

b= 1 et a=3 ⟹ (8,6,10) ; (6,8,10

b=1 et a=4 ⟹ (15,8,17) ; (8,15,17) b=1 et a=5 ⟹ z>18

b=2 et a=3 ⟹ (5,12,13) ;(12,5,13)

b=2 et a=4 ⟹ z>18 b=3 et a=4 ⟹ z>18

Conclusion: Tous les triplets de E tels que z EMBED Equation.DSMT4 18 sont :
(3,4,5) ;(6,8,10) ; (9,12,15) ;(4,3,5); (8,6,10);(12,9,15); (15,8,17) ; (8,15,17)
(5,12,13) ;(12,5,13)

Qarray.tn - Anis Bleik Qarray.tn